レーザー共振器の微小な変形について

堀内義行・井上　浩

Modes in a Laser Cavity with small Misalignment

Yosiyuki HORIUCHI, Hirosi INOUE

The integral equations of a gas laser cavity are solved by means of perturbation in three cases:

(a) tilted mirrors,

(b) inserted pins,

(c) inserted aperture.

We can use these three results for the mode selection of laser oscillators.

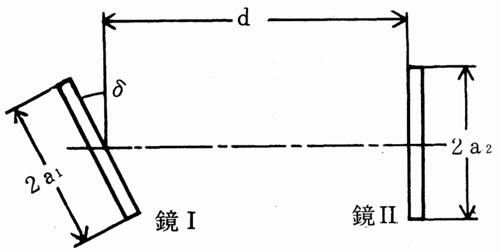
(1)　はじめに

ガスレーザーにおいて発振周波数を決めるレーザー共振器については種々計算されている。本文は最低次の横モード（００）が共振器の微小な変形によって如何なる変化を来たすかを文献（６）の方法によって計算を行なった結果を述べたもので、共振器の微小な変形としては、(a)共振器が傾斜した場合、(b)共振器の中のビーム中に針を挿入した場合、(c)共振器内に開口を挿入した場合を、取り上げている。

(2)　共振器を傾斜した場合

レーザー共振器を傾けた時のモードの形およびそのときの回折損失、発振周波数が知られている。

ここでは一方の鏡のみが$\phi_1=\theta$で最大変化角度δだけ傾いた場合について考える。このときの積分方程式は$\delta \ll 1$として次式で与えられる。



図－１　鏡を傾斜したときの共振器

$$K_{Tn} f_{Tn}(x,\phi_1)=\int_0^1\int_0^{2\pi} K_T(x,\phi_1;y,\phi_2)\, g_{Tn}(y,\phi_2)\, d\phi_2\, y\, dy$$

$$K_{Tn} g_{Tn}(y,\phi_2)=\int_0^1\int_0^{2\pi} K_T(x,\phi_1;y,\phi_2)\, f_{Tn}(x,\phi_1)\, d\phi_1\, x\, dx$$

$$K_T(x,\phi_1;y,\phi_2)=jNe^{-jkd}\cdot e^{-jN\pi (G_1x^2+G_2y^2-2xy\cos(\varphi_1-\varphi_2))} \quad \cdots\cdots(1)$$

がえられる。$\delta=0$のときの解をもとにして摂動法を用いると（００）モードに属する固有値は

$$K_{T00}=-K_{00}\,exp\left\{-\frac{\delta^2 a_1^2 k^2}{4\alpha_1}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

となる。（10Ｓ）モードと（10Ｃ）モードは縮退がとけ固有関数は

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_1 x e^{-\frac{\beta_1}{2}x^2}\ \sin(\phi_1-\theta) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_1 x e^{-\frac{\beta_1}{2}x^2}\ \cos(\phi_1-\theta) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

となり、固有値は

$$\left.\begin{array}{l} K_{10}\,exp\left\{-\frac{\delta^2 a_1^2 k^2}{4\alpha_1}\right\} \\ K_{10}\left(1-\frac{\delta^2 a_1^2 k^2}{2\alpha_1}\right) exp\left\{-\frac{\delta^2 a_1^2 k^2}{4\alpha_1}\right\} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

となる。一般に$\ell \neq 0$として(ℓns), (ℓnc)モードは

$$f_{T\ell n}^{(S)}(x,\phi)=\sqrt{\frac{2n!\,\alpha_1}{(\ell+n)!\,\pi}}$$

$$(\sqrt{\alpha_1}x)^{e}L_n^{e}(\alpha_1x^2)e^{-\frac{\beta_1}{2}x^2}\sin\ell(\phi-\theta)\cdots\cdots(5)$$

$$f_{Ten}^{(C)}(x,\phi)=\sqrt{\frac{2n!\alpha_1}{(\ell+n)!\pi}}$$

$$(\sqrt{\alpha_1}x)^{e}L_n^{e}(\alpha_1x^2)e^{-\frac{\beta_1}{2}x^2}\cos\ell(\phi-\theta)\cdots\cdots(6)$$

となりそれぞれに属している固有値は

$$\left.\begin{array}{l}K_{Ten}^{(S)}=K_{en}(A+B)\\ K_{Ten}^{(C)}=K_{en}(A-B)\end{array}\right\}\cdots\cdots(7)$$

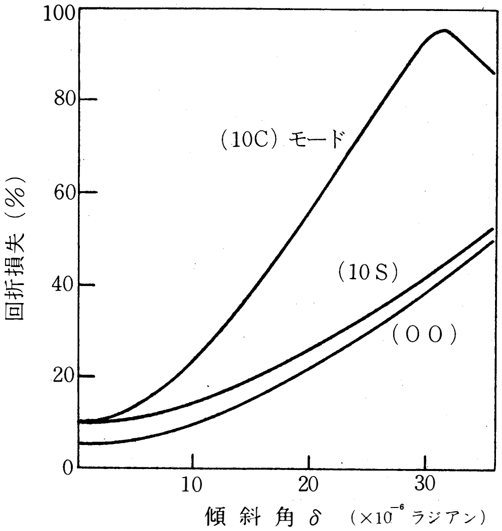
$$A=\frac{2n!\alpha_1}{(\ell+n)!}\int_0^\infty(\sqrt{\alpha_1}x)^{2e+1}[L_n^{e}(\alpha_1x^2)]^2$$

$$[J_0(k\delta a_1x)-1]e^{-\alpha_1x^2}xdx$$

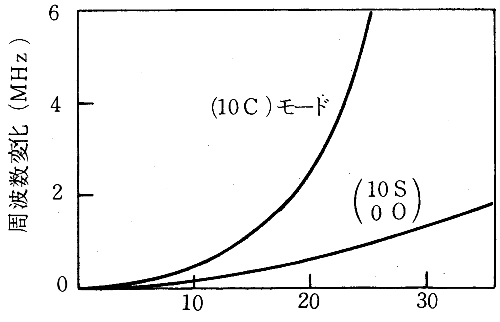
$$B=(-1)^{e}\frac{2n!\alpha_1}{(\ell+n)!}\int_0^\infty\sqrt{\alpha_1}x)^{2e+1}[L_n^{e}(\alpha_1x^2)]^2$$

$$J_{2e}(k\delta a_1x)\bar{e}^{\alpha_1x^2}xdx$$

となる。



図－2　鏡傾斜による回折損失の変化



図－3　鏡傾斜による周波数変化

図－2、図－3は鏡の傾斜に対して回折損失および相対周波数変化（傾きのないときを基準として）をプロットしたものである（フレネル数N＝ 0.8、パラメータ$g_1=g_2=0.8$；$a_1=a_2=7.8$mm、$\lambda=0.6328\mu$、$d=120$ cm、$\alpha_1=\alpha_2=3.067+j\,0.261$、$\beta_1=\beta_2=0.166-j\,0.029$ とする。）これより10μラジアン傾くと（00）モードが10%、（10S）モードが15%、(10C）モードが23%回折損失を受けることとなる。また（00）モードと（10S）モードが100 KHz、(10C）モードが450 KHz発振周波数が変化することがわかる。

(3) 針を挿入した場合

鏡の近くに針を押入した場合を考える。(図－4）針は角度δで$\phi_1=\theta$の位置にあるものとする。簡単のため鏡と針との距離d_1は零であるとする。このときの積分方程式は

$$K_{Nen}f_{Nen}(x,\phi_1)$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}K_N(x,\phi_1;y,\phi_2)g_{Nen}(y,\phi_2)d\phi_2ydy\cdots\cdots(8)$$

$$K_{Nen}g_{Nen}(y,\phi_2)=\int_0^1\left\{\int_0^{\theta-\frac{\epsilon}{2}}+\int_{\theta+\frac{\epsilon}{2}}^{2\pi}\right\}$$

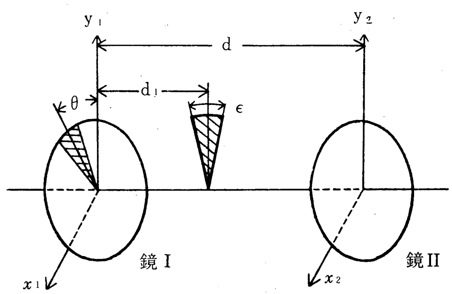
$$K_N(x,\phi_1;y,\phi_2)f_{Nen}(x,\phi_1)d\phi_1xdx\cdots\cdots(9)$$

となる。このとき核$K_N(\cdot)$は(1)式の核$K_T(\cdot)$に$\gamma=0$を代入したものに等しい。$\dot{\epsilon}=0$のときの固有関数f_{en}（ˋ）、g_{en}（ˋ）をもとにして攝動法を用いる。（0 0）モードの固有値は

$$K_{oo}(1-\frac{\varepsilon}{4\pi})\cdots\cdots(10)$$

となる。（10S）、(10C）モードは縮退がとけ

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha_1xe^{-\frac{\beta_1}{2}x^2}\sin(\phi-\theta)\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha_1xe^{-\frac{\beta_1}{2}x^2}\cos(\phi-\theta)\end{array}\right\}\cdots\cdots(11)$$



図－4　針をそう入された共振器

となり、固有値は

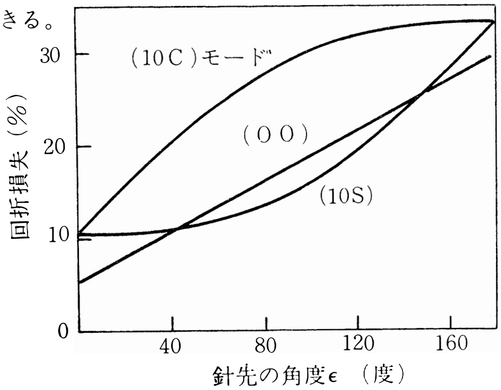
$$\left.\begin{aligned} &K_{10}\left(1-\frac{\varepsilon-\sin\varepsilon}{4\pi}\right) \\ &K_{10}\left(1-\frac{\varepsilon+\sin\varepsilon}{4\pi}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(12)$$

となる。一般に（ℓns）、（$\ell n\ c$）モードは式(5)、(6)に等しく固有値は

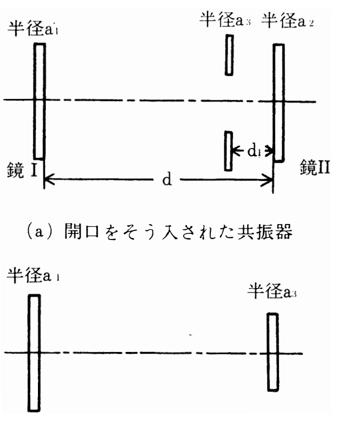
$$\left.\begin{aligned} &K_{en}\left\{1-\frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon-\frac{\sin\ell\varepsilon}{\ell}\right)\right\} \\ &K_{en}\left\{1-\frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon+\frac{\sin\ell\varepsilon}{\ell}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(13)$$

となる。

図－５には$N=0.8$、　$g_1=g_2=0.8$のときの針先の角度ϵと回折損失の関係を示している。θが小さいとき$K^{(S)}_{N10}$はほとんど変化しないが$K^{(C)}_{N10}$は変化が大きく、K_{N00}はその間の値をとることがわかる。ただし、εの小さいときのみこの曲線を利用できる。



図－５　針先の角度ϵと回折損失



（b）等価共振器

図－６　開口をそう入したときの共振器

(4)　共振器内に開口を挿入した場合

図－6(a)に示すように鏡IIの近くに半径a_3の穴のあいた開口を挿入した場合を考える。簡単のため$d_1=0$とし、図－6(b)に示された半径a_1、a_3の鏡を有する共振器と考える。

パラメーターkを鏡IIと開口の大きさとの比とし

$$a_3=ka_2 \cdots\cdots(14)$$

とおく。式(14)から、この場合のフレネル数Ｎおよび G因子G_1、G_2は次のようになる。

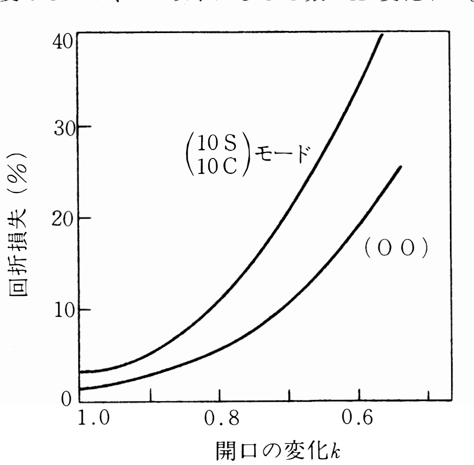
$$N=\frac{a_1a_3}{\lambda d}=k\frac{a_1a_2}{\lambda d}=kN^{(0)} \cdots\cdots(15)$$

$$G_1=g_1\frac{a_1}{a_3}=\frac{1}{k}g_1\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{k}G^{(0)} \cdots\cdots(16)$$

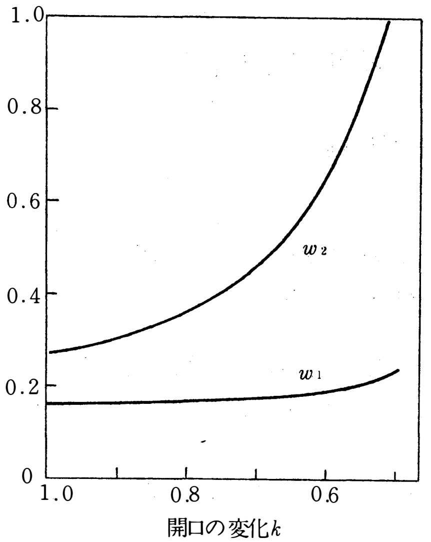
$$G_2=g_2\frac{a_3}{a_1}=kg_2\frac{a_2}{a_1}=kG_2^{(0)} \cdots\cdots(17)$$

ここに$N^{(0)}$、$G_1^{(0)}$、$G_2^{(0)}$は$k=1$のときの値である。このパラメーターを用いて(1)に代入すると固有値、固固有数を求めることができる。

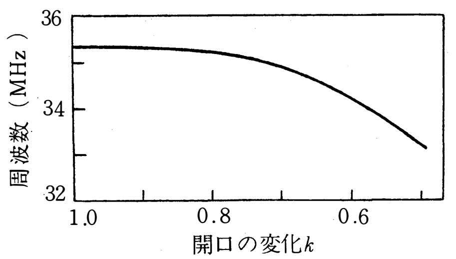
図－７は開口の大きさと回折損失との関係を、図－８は鏡Ｉおよび鏡IIにおけるスポットサイズを示している。（$g_1=0.8$、$g_2=0.5$、$N=1.0$）、この場合には（10Ｓ）モードと（10Ｃ）モードの縮退はとけない。$k=0.7$で（00）モードの損失は10％、（10Ｓ）、（10Ｃ）モードの損失は20％であることがわかる。開口を入れない方のスポットサイズω_1はほとんど変化しないが、開口を入れた方のスポットサイズω_2はかなり大きく変化することがわかる。図－９に発振周波数の変化を示す。$k=0.7$まではほとんど変らないが、0.6以下になると数MHz変化する。



図－７　開口の変化と回折損失



図－8　開口によるスポットサイズの変化



図－9　開口と相対周波数

(5) むすび

共振器の微小変形を攝動として回折損失、スポットサイズ、共振周波数を求めた。更に媒質の非直線性利得のある場合にも求めたいと思っている。

文　献

(1) H.Zucker;B.S.T.J.49, 2349(1970)

(2) A.N.Chester:Apl. Opt. 11, 2584(1972)

(3) A.N.Chester:IEEEJ. QE-9, 209(1973)

(4) K.O.Hill and C.K.Campbell;Can.J.Phy 51, (1973)

(5) 末松、野村、片倉; 電学誌53-B, B-382(1970)

(6) 堀内、井上; 昭48北陸支部連大 C-31(昭48)

(7) Odedkafri, Shammai, Speiser and Sol Kimel; IEEE J. QE, (1971)

(8) AG. Fox and Lie;Proc IEEE51, 80(1963)

(9) T.Lie;BSTJ 42, 2609(1963)

(10) 宮本;研資QE 70-19(1970-09)

(11) 鈴木;応物40, 10(1971)